[OA] p. 82, 83
Marco p. 279

Développement :

Prolongement de la fonction γ d'Euler :

Leçons 207
235
239
245
265
241

Théorème :

Soit $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ la fonction gamma d'Euler, définie sur $W = \{z \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Alors la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont des entiers négatifs.

Étape 1 : On découpe en 2 morceaux :

$$\forall z \in W,\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

(mq que les deux intégrales convergent et que Γ est donc bien définie)

- $\forall t \in]0,1]$, $|e^{-t} t^{z-1}| \leq |t^{z-1}| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ intégrable sur $]0,1]$.
- $\forall t \in [1,+\infty[$, $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et nous allons exprimer la première intégrale sous forme d'une série :

$$t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{z-1} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Ainsi $\forall z \in W$, $\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right) dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Étape 2 : Interversion somme et série :

Nous allons appliquer Fubini :

* Soit $t \in]0,1]$ fixé.

$$\sum_{n=0}^{N} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} t^n . t^{\mathrm{Re}(z)-1} = t^{\mathrm{Re}(z)-1} . \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^t .$$

* Or, $\mathrm{Re}(z) > 0$ car $z \in W$ donc $t \mapsto t^{\mathrm{Re}(z)-1} . e^t \in L^1(]0,1])$

Ainsi par le théorème de Fubini,

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Étape 3 : On montre que ceci est méromorphe :

Rappel : Thm Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) suite de fct méromorphes sur U tq :

i) pour tout K compact de U, $\exists N_K$ tq $\forall n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K.
ii) la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge unif sur K.

Alors $\sum f_n$ méromorphe sur U.

Preuve : (se déduit directement de la convergence uniforme d'une série holomorphe)

def : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) suite de fonctions méromorphes sur U.
On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de U si $\forall K$ compact dans U :
i) $\exists N_K$ tq $\forall n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôle dans K
ii) $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Ainsi soit (f_n) suite de fonctions méromorphes sur U vérifiant (1) et (2).

$$\forall z \in K, \quad f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N_K} f_n(z)}_{\text{fct méromorphe}} + \sum_{n=N_K+1}^{+\infty} f_n(z)$$

fct méromorphe

holomorphe comme série de fct holomorphes sur K convergeant uniformément sur K.

Posons $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ et $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple $-n$
* Soit K compact de $\mathbb{C}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $K \subset \overline{D(0,N)}$.

  $\forall n > N$, f_n n'a pas de pôle dans K.
* Enfin, $\forall z \in K$:

  $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$

  donc

  $$|f_n(z)| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n!(n-N)} \right| = \frac{1}{n!(n-N)} \quad \text{or} \quad \sum_{n \geq N} \frac{1}{n!(n-N)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+N)!\, n} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$$

  Ainsi, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} < +\infty$ donc converge normalement

  donc converge uniformément

Ainsi par le rappel, f est méromorphe et a pour pôles simples les entiers négatifs.

▶ Étape 4 : Le deuxième morceau :

Nous allons montrer que $z \mapsto \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $h :]1, +\infty[\times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(t, z) \mapsto t^{z-1} e^{-t}$

* $t \mapsto h(t,z)$ mesurable $\forall z \in \mathbb{C}$
* $z \mapsto h(t,z)$ holomorphe pour presque tout t.

* Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Soit $z \in K$.

$|h(t,z)| = t^{Re(z)-1} e^{-t}$

Or $z \in K$ donc $\exists \alpha > 0$ tq $Re(z) \leqslant \alpha$. Ainsi, $\forall (t,z) \in]1,+\infty[\times K$

$|h(t,z)| \leqslant \underbrace{t^{\alpha-1} e^{-t}}_{g_K(t)} \in L^1(]1,+\infty[)$.

Ainsi: $\int_1^{+\infty} h(t,z)\, dt$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Étape 5: Conclusion:

$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est donc un prolongement de Γ

méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ dont les pôles, tous simples,

sont les entiers négatifs.

Application: (formule de Gauss)

$\forall z \in W$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$

Ainsi $1/\Gamma$ est entière, (càd définie sur $\mathbb{C}$ entier)

Par convergence dominée, on a $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{z-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

$= \lim_{n\to+\infty} I_n$

$I_n = \left[\frac{t^z}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^n + \int \frac{n}{nz} \int_0^n t^z \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$

$= \dots$

$= \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$